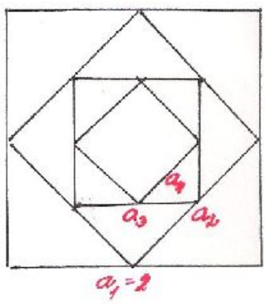
11. Slovní úlohy na nekonečné geometrické řady

Příklady

① Do čtverce o délce strany 2 je vepsán čtverec, jehož strany jsou spojnicemi středů stran daného čtverce. Do vepsaného čtverce je stejným způsobem vepsán další čtverec atd. Vypočítejte součet obvodů a součet obsahů všech takovýchto čtverců.



a_2: $a_2^2 = 1^2+1^2$, $a_2^2 = 2$, $a_2 = \sqrt{2}$ [úhl. čtverce o straně $1 \Rightarrow \sqrt{2}$]

a_3: $a_3^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, $a_3^2 = \frac{2}{4}+\frac{2}{4}$, $a_3 = 1$ [je i vidět z vlastn.]

a_4: $\frac{a_3}{2} = \frac{1}{2}$, $a_4^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $a_4^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, $a_4^2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ [lze i z obr. $a_4 = \frac{a_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$]

atd. $a_5 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{2}$

obvod $o = 4(a_1+a_2+a_3+\dots)$

$$o = 4(\underbrace{2+\sqrt{2}+1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{1}{2}+\dots}_{GŘ}) = 4\cdot\frac{4}{2-\sqrt{2}} = \frac{16}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{16(2+\sqrt{2})}{4-2} = 8(2+\sqrt{2})$$

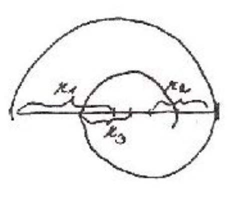
[$a_1 = 2$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{2-\sqrt{2}}$
podm. konvergence $|q|<1$ pl.]

obsah $S = a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots = 2^2+(\sqrt{2})^2+1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dots = \underbrace{4+2+1+\tfrac{1}{2}+\dots}_{GŘ}$

[$a_1 = 4$, $q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $|q|<1$ podm. konv. platí
$s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$]

$S = 8$ (j^2)

② Spirála se skládá z polokružnic. Přitom poloměr každé následující kružnice je o jednu třetinu menší než poloměr předcházející kružnice. Určete délku spirály, je-li poloměr první kružnice roven r.



$r_1 = r$
$r_2 = \frac{2}{3}r$
$r_3 = \frac{2}{3}\cdot r_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}r = \frac{4}{9}r$
$r_4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}r = \frac{8}{27}r$
$\vdots$

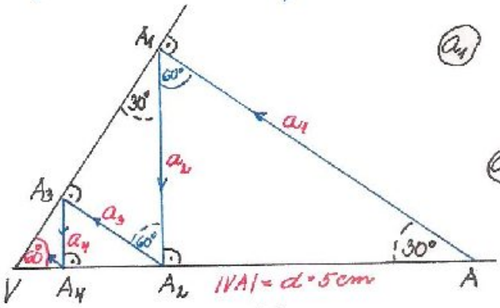
$o_1 = \pi r_1 = \pi r$ [půlkružnice $o = \frac{2\pi r}{2}$]
$o_2 = \pi r_2 = \frac{2}{3}\pi r$
$o_3 = \frac{4}{9}\pi r$
$o_4 = \frac{8}{27}\pi r$
$\vdots$

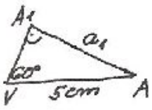
$$o = \pi r + \frac{2}{3}\pi r + \frac{4}{9}\pi r + \frac{8}{27}\pi r + \dots$$

$$o = \pi r(\underbrace{1+\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{9}+\tfrac{8}{27}+\dots}_{}) = \pi r\cdot 3 = 3\pi r$$

[GŘ $a_1 = 1$, $q = \frac{2}{3}$ $|q|<1$ pl. podm. konvergence $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

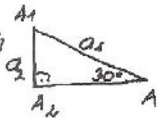
③ Z bodu A jednoho ramene ostrého úhlu $\alpha = 60°$, který je od vrcholu daného úhlu vzdálen $d = 5$ cm spusťte kolmici na druhé rameno, z její paty opět kolmici na první rameno atd. Určete délku lomené čáry.



(a₁) 

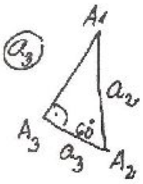
$\sin 60° = \frac{a_1}{5} \Rightarrow a_1 = 5 \sin 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\left[= 5\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\right]$

(a₂) 

$\sin 30° = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \sin 30° =$

$= \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[= 5\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

(a₃) 

$\cos 60° = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cos 60° =$

$= \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\left[= 5\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]$

délka lomené čáry

$d = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

$d = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots$

$d = \frac{5\sqrt{3}}{2} \left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots}\right)$

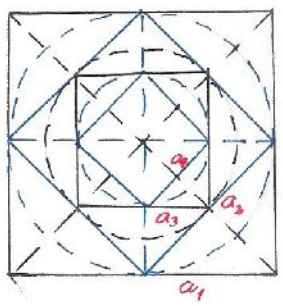
[ úhly střídavé]

[GŘ: $a_1 = 1 \quad q = \frac{1}{2}$

podmínka konvergence $|q| < 1$ platí $\Rightarrow s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$]

$d = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 5\sqrt{3}$

④ Do čtverce je vepsána kružnice, do ní opět čtverec atd. Vypočítejte součet obsahů všech takto vzniklých čtverců. Velikost strany prvního čtverce je 4. [obdoba př. 1]



$a_1 = a = 4$

$a_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$a_3 = \frac{a}{2} = 2$

$a_4 = \sqrt{2}$

⋮

(a₂)  $u_1^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$a_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

(a₃) $a_3 = \frac{a_1}{2} = 2$

(a₄)  $\frac{a_3}{2} = 1 \quad a_4^2 = 1^2 + 1^2$

$\frac{a_3}{2} = 1 \quad a_4 = \sqrt{2}$

$S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \dots$

$S = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2^2 + (\sqrt{2})^2 + \dots$

$S = \underbrace{16 + 8 + 4 + 2} + \dots$

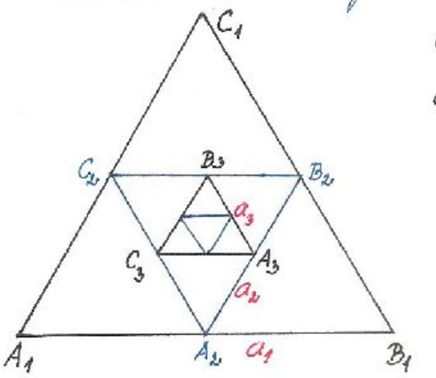
[GŘ: $a_1 = 16 \quad q = \frac{1}{2}$

podm. konverg. $|q| < 1$ pl. $\quad s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32$]

$S = 32\ (j^2)$

4R/114

⑤ Do rovnostranného $\Delta\, A_1B_1C_1$ o délce strany 2 je vepsán druhý $\Delta\, A_2B_2C_2$ tak, že jeho vrcholy jsou ve středech stran $\Delta\, A_1B_1C_1$, do tohoto Δ je stejným způsobem vepsán $\Delta\, A_3B_3C_3$ atd. Vypočítejte
a) součet obvodů b) součet obsahů
všech takto vzniklých trojúhelníků.



$a_1 = 2$ všechny Δ jsou rovnostranné

$a_2 = |A_1B_1| = \frac{1}{2}a_1 = 1$ (střední příčka Δ)

$a_3 = |A_2B_2| = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}$

$a_4 = \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\vdots$

} GP: $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{2}$

součet obvodů všech Δ

$$o = o_1 + o_2 + o_3 + \dots = 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + \dots$$

$$o = 3(\underbrace{2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \dots}) = 3\cdot 4 = 12\ (j)$$

GŘ: $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{2}$

podm. konvergence $|q| < 1$ pl. $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

součet obsahů všech Δ

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$$

$$S = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16} + \dots$$

$$S = \sqrt{3}(\underbrace{1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \dots})$$

[GŘ: $a_1 = 1$ $q = \frac{1}{4}$

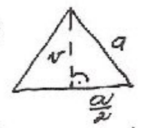
podm. konv. $|q| < 1$ pl.

$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$]

$$S = \sqrt{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ (j^2)$$

(S_1) $S_1 = \frac{1}{2}a_1v_1 = \frac{1}{2}a_1\cdot\frac{a_1\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

[(v)



$a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

výška rovnostr. Δ $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

- lze i gon. fcemi

$\sin 60° = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a\sin 60°$

$v = a\frac{\sqrt{3}}{2}$]

(S_2) $S_2 = \frac{1}{2}a_2v_2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

[$v_2 = a_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$]

(S_3) $S_3 = \frac{1}{2}a_3v_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}$

[$v_3 = a_3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$